5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος ,** αν και μόνο αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

2.

Μαθηματική έκφραση του ορισμού

α_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$ γεωμετρική πρόοδος $\Leftrightarrow$ $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

3.

Περιορισμός

Στη γεωμετρική πρόοδο είναι πάντοτε $\lambda \neq 0$ και $\alpha_\nu \neq 0$

4.

Τύπος του ν-οστού όρου : $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$

5.

Συνθήκη του γεωμετρικού μέσου

Οι $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Ο β, δηλαδή ο $\sqrt{\alpha\gamma}$, λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ

6.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων : $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Παρατήρηση : Όταν $\lambda = 1$, δεν ισχύει ο τύπος.

Είναι βέβαια $\alpha_\nu = \alpha_1$ για κάθε ν, οπότε $S_\nu = \nu\alpha_1$

netsuccess.gr

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Πότε θεωρείται γνωστή μια γ. πρόοδος

Όταν γνωρίζουμε τον όρο α_1 και το λόγο λ.

2.

Η διπλή σημασία του συμβόλου α_ν

Συμβολίζει τη γ.πρόοδο α_ν ή το ν-οστό όρο. Εξαρτάται από τα συμφραζόμενα.

3.

Παρατήρηση.

Καθένας από τους τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ και $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ περιέχει τέσσερις μεταβλητές.

Αν γνωρίζουμε τις τρεις, μπορούμε να βρίσκουμε την τέταρτη λύνοντας την εξίσωση.

4.

Μέθοδος

Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις και λύνουμε το σύστημα

5.

Μέθοδος

α) Για άρτιο πλήθος όρων, θεωρούμε τους $\ldots \dfrac{x}{\lambda^3}, \quad \dfrac{x}{\lambda}, \quad x\cdot\lambda, \quad x\cdot\lambda^3 \ldots$

Εδώ ο λόγος της προόδου είναι λ^2 ή $-\lambda^2$

β) Για περιττό πλήθος όρων, θεωρούμε τους $\ldots \dfrac{x}{\lambda^2}, \quad \dfrac{x}{\lambda}, \quad x, \quad x.\cdot\lambda, \quad x\cdot\lambda^2 \ldots$

Εδώ ο λόγος της προόδου είναι λ.

netsuccess.gr

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σε μία γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_4 = 13$, $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$.
Να βρείτε την πρόοδο και το πλήθος των όρων της

Προτεινόμενη λύση

Έστω α_1 ο πρώτος όρος και λ ο λόγος της προόδου

Σχόλιο 4

$$\alpha_4 = 13 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{4-1} = 13 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^3 = 13 \quad \textbf{(1)}$$

$$\alpha_6 = 117 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{6-1} = 117 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^5 = 117 \quad \textbf{(2)}$$

$$\alpha_\nu = 9477 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 9477 \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{(2)}{(1)} : \quad \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = 3 \quad ή \quad \lambda = -3$$

- Για $\lambda = 3$, η (1) $\Leftrightarrow \alpha_1 27 = 13 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{13}{27}$

  $$(3) \Leftrightarrow \frac{13}{27}\cdot 3^{\nu-1} = 9477 \Leftrightarrow 3^{\nu-1} = \frac{9477\cdot 27}{13}$$

  $$3^{\nu-1} = 729\cdot 27$$

  $$3^{\nu-1} = 3^6\cdot 3^3$$

  $$3^{\nu-1} = 3^9$$

  $$\nu - 1 = 9 \Leftrightarrow \nu = 10$$

- Για $\lambda = -3$, η (1) $\Leftrightarrow \alpha_1(-27) = 13 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{13}{27}$

  Ομοίως βρίσκουμε $\nu = 10$

netsuccess.gr

2.

Δύο πρόοδοι μία αριθμητική και μία γεωμετρική έχουν κοινούς τους δύο πρώτους όρους. Στην αριθμητική πρόοδο ο τέταρτος όρος είναι μεγαλύτερος του δεύτερου κατά 10, ενώ στην γεωμετρική κατά 30. Να βρεθούν οι πρόοδοι .

Προτεινόμενη λύση

Έστω α ο πρώτος όρος των δύο προόδων, ω η διαφορά της αριθμητικής και λ ο λόγος της γεωμετρικής. Αρκεί να βρούμε τους α, ω, λ.

Οι υποθέσεις $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\omega=\alpha\lambda \\ \alpha+3\omega=\alpha+\omega+10 \\ \alpha\lambda^3=\alpha\lambda+30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\lambda-1)=5 & (1) \\ \omega=5 & (2) \\ \alpha\lambda(\lambda^2-1)=30 & (3) \end{cases}$

$\frac{(3)}{(1)}$: $\frac{\alpha\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}{\alpha(\lambda-1)}=6 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-3$

- Για $\lambda=2$, η (1) $\Leftrightarrow$ $\alpha=5$ και από τη (2) είναι $\omega=5$
- Για $\lambda=-3$ η (1) $\Leftrightarrow$ $\alpha=-\frac{5}{4}$ και από τη (2) είναι $\omega=5$

netsuccess.gr

3.

Ο πρώτος , ο δεύτερος , ο τέταρτος και ο ν-στός όρος μιας αριθμητικής προόδου με $\omega \neq 0$ έχουν άθροισμα 45 και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
Να ορίσετε τις δύο προόδους.

Προτεινόμενη λύση

Έστω α ο πρώτος όρος και ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου.

$\alpha, \quad \alpha+\omega, \quad \alpha+3\omega$ γ.πρόοδος $\Leftrightarrow$ $(\alpha+\omega)^2 = \alpha(\alpha+3\omega)$

$$\alpha^2 + 2\alpha\omega + \omega^2 = \alpha^2 + 3\alpha\omega$$

$$\omega^2 - \alpha\omega = 0$$

$$\omega(\omega-\alpha) = 0$$

$$\omega = \alpha \quad \text{αφού } \omega \neq 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

$\alpha+\omega, \quad \alpha+3\omega, \quad \alpha+(\nu-1)\omega$ γ.πρόοδος $\Leftrightarrow$ $(\alpha+3\omega)^2 = (\alpha+\omega)(\alpha+\nu\omega-\omega)$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad (\alpha+3\alpha)^2 = (\alpha+\alpha)(\alpha+\nu\alpha-\alpha)$$

$$(4\alpha)^2 = 2\alpha \cdot \nu\alpha$$

$$16\alpha^2 = 2\nu\alpha^2$$

και αφού $\alpha = \omega \neq 0, \quad 16 = 2\nu \quad \Leftrightarrow \quad \nu = 8$

Άθροισμα 45 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\alpha+\omega+\alpha+3\omega+\alpha+(\nu-1)\omega = 45$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad \alpha+\alpha+\alpha+\alpha+3\alpha+\alpha+(8-1)\alpha = 45$$

$$15\alpha = 45 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3 = \omega$$

Η αρ.πρόοδος είναι 3, 6, 9, 12, . . .

Η γ.πρόοδος είναι 3, 6, 12, 24, . . .

4.

Μεταξύ των αριθμών 1 και 32 να παρεμβάλετε 4 άλλους, έτσι ώστε η ακολουθία που θα προκύψει να είναι γεωμετρική πρόοδος .

Προτεινόμενη λύση

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τέσσερις ενδιάμεσοι τότε η ακολουθία

$1, x_1, x_2, x_3, x_4, 32$ είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\nu = 6$ και $\alpha_6 = 32$.

$\alpha_6 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1\lambda^5 = 32$

Σχόλιο 4

$$\lambda^5 = 32$$

$$\lambda = \sqrt[5]{32} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$$

Άρα $x_1 = 1\cdot2 = 2, \quad x_2 = 2\cdot2 = 4, \quad x_3 = 2\cdot4 = 8, \quad x_4 = 2\cdot8 = 16$

netsuccess.gr

5.

Έστω η ακολουθία α_ν με $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu + 4}{5}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$

i) Δείξτε ότι η ακολουθία $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\dfrac{3}{5}$ και πρώτο όρο $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}$

ii) Να βρείτε συναρτήσει του ν τους ν-στούς όρους των α_ν και β_ν

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\alpha_{\nu+1}-2}{\alpha_\nu - 2} = \frac{\dfrac{3\alpha_\nu+4}{5} - 2}{\alpha_\nu - 2} = \frac{3\alpha_\nu + 4 - 10}{5(\alpha_\nu - 2)} = \frac{3\alpha_\nu - 6}{5(\alpha_\nu - 2)} = \frac{3(\alpha_\nu - 2)}{5(\alpha_\nu - 2)} = \frac{3}{5}$$

άρα η ακολουθία β_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \dfrac{3}{5}$ και $\beta_1 = \alpha_1 - 2 = \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$

ii)

Είναι $\beta_\nu = \beta_1\lambda^{\nu-1} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\nu-1}$ **(1)**

Από την υπόθεση $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2 \Rightarrow \alpha_\nu = \beta_\nu + 2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \alpha_\nu = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1} + 2$$

netsuccess.gr

6.

Μίας ακολουθίας αν ο ν-στος όρος είναι $\alpha_\nu = 3\cdot 2^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

i) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο.

ii) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του ν για την οποία ισχύει $\alpha_\nu > 1550$;

Προτεινόμενη λύση

i)

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{3\cdot 2^{\nu+1+1}}{3\cdot 2^{\nu+1}} = \dfrac{2^{\nu+2}}{2^{\nu+1}} = 2$

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 3\cdot 2^{1+1} = 12$ και $\lambda = 2$

ii)

$\alpha_\nu > 1550 \quad \Leftrightarrow \quad 12\cdot 2^{\nu-1} > 1550 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\nu-1} > \dfrac{1550}{12} \approx 129{,}1$ **(1)**

Όμως $2^7 = 128$ και $2^8 = 256$

$(1) \quad \Rightarrow \quad 2^{\nu-1} > 128$

$2^{\nu-1} > 2^7$

$\nu - 1 > 7$

$\nu > 8 \quad \Rightarrow \quad \nu = 9$

netsuccess.gr

7.

Να απλοποιηθεί το κλάσμα $K = \dfrac{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^\nu}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^\nu}}$

Προτεινόμενη λύση

Ο αριθμητής είναι άθροισμα $\nu + 1$ όρων γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$ και $\lambda = x$

Άρα ο αριθμητής είναι $A = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{\nu+1} - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}$

Ο παρονομαστής επίσης είναι άθροισμα $\nu + 1$ όρων γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$

και $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Άρα ο παρονομαστής είναι $\Pi = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{\nu+1} - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{\frac{1}{x^{\nu+1}} - 1}{\frac{1}{x} - 1} =$

$$= \dfrac{\frac{1 - x^{\nu+1}}{x^{\nu+1}}}{\frac{1 - x}{x}}$$

$$= \dfrac{1 - x^{\nu+1}}{x^\nu(1 - x)}$$

Επομένως $K = \dfrac{\frac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}}{\frac{1 - x^{\nu+1}}{x^\nu(1 - x)}} = \dfrac{x^\nu(1 - x)(x^{\nu+1} - 1)}{(x - 1)(1 - x^{\nu+1})} = x^\nu$

8.

Αν οι ρητοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 2\beta x = \alpha(4\alpha - \gamma)$ έχει ρίζες ρητούς αριθμούς .

Προτεινόμενη λύση

$x^2 - 2\beta x = \alpha(4\alpha - \gamma) \iff x^2 - 2\beta x - \alpha(4\alpha - \gamma) = 0$ **(1)**

$\Delta = 4\beta^2 + 4\alpha(4\alpha - \gamma) = 4\beta^2 + 16\alpha^2 - 4\alpha\gamma$

Όμως α, β , γ γ. Πρόοδος, άρα $\beta^2 = \alpha\gamma$, οπότε $\Delta = 4\alpha\gamma + 16\alpha^2 - 4\alpha\gamma = 16\alpha^2$

(1) $\iff x = \dfrac{2\beta \pm 4\alpha}{2} = \beta \pm 2\alpha \in \mathbb{Q}$ αφού α, β ρητοί

netsuccess.gr

9.

Αν S_ν ,$S_{2\nu}$, $S_{3\nu}$ είναι τα αθροίσματα των ν , 2ν , 3ν όρων γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι $S_\nu(S_{3\nu}-S_{2\nu}) = (S_{2\nu}-S_\nu)^2$.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $S_\nu = \dfrac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}$, $S_{2\nu} = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{2\nu}-1)}{\lambda-1}$, $S_{3\nu} = \dfrac{\alpha_1(\lambda^{3\nu}-1)}{\lambda-1}$

Αρκεί $S_\nu(S_{3\nu}-S_{2\nu}) = (S_{2\nu}-S_\nu)^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\left(\frac{\alpha_1(\lambda^{3\nu}-1)}{\lambda-1}-\frac{\alpha_1(\lambda^{2\nu}-1)}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\alpha_1(\lambda^{2\nu}-1)}{\lambda-1}-\frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\right)^2$$

$$\frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\left(\frac{\alpha_1(\lambda^{3\nu}-1)-\alpha_1(\lambda^{2\nu}-1)}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\alpha_1(\lambda^{2\nu}-1)-\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\right)^2$$

$$\frac{\alpha_1(\lambda^\nu-1)}{\lambda-1}\left(\frac{\alpha_1\lambda^{3\nu}-\alpha_1\lambda^{2\nu}}{\lambda-1}\right)=\left(\frac{\alpha_1\lambda^{2\nu}-\alpha_1\lambda^\nu}{\lambda-1}\right)^2$$

$$\frac{\alpha_1^2(\lambda^\nu-1)(\lambda^{3\nu}-\lambda^{2\nu})}{(\lambda-1)^2}=\frac{\alpha_1^2(\lambda^{2\nu}-\lambda^\nu)^2}{(\lambda-1)^2}$$

$$(\lambda^\nu-1)(\lambda^{3\nu}-\lambda^{2\nu})=(\lambda^{2\nu}-\lambda^\nu)^2$$

$\lambda^{4\nu}-\lambda^{3\nu}-\lambda^{3\nu}+\lambda^{2\nu}=\lambda^{4\nu}-2\lambda^{3\nu}+\lambda^{2\nu}$ η οποία είναι προφανής

10.

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right) = \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta}+\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma} \quad \textbf{(1)} .$$

Από υπόθεση είναι $\beta^2 = \alpha\gamma$, αντικατάσταση στην (1)

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right) = \frac{\alpha\gamma\gamma^2}{\alpha}+\frac{\beta^4}{\beta}+\frac{\alpha^2\alpha\gamma}{\gamma}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

netsuccess.gr

11.

Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι οι αριθμοί $\alpha - \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma - \frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Προτεινόμενη λύση

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ αριθμητική πρόοδος $\Leftrightarrow$ $2\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ $\Leftrightarrow$ $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$

Αρκεί να αποδείξουμε $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)$

$$\frac{\beta^2}{4} = \alpha\gamma - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta^2}{4}$$

$$\alpha\gamma = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\gamma\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$$ που ισχύει

12.

Αν οι αριθμοί x, y, ω αποτελούν αριθμητική πρόοδο και οι αριθμοί x, λy, ω γεωμετρική, δείξτε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{x}, \frac{1}{\lambda^2 y}, \frac{1}{\omega}$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Προτεινόμενη λύση

x, y, ω αριθμητική πρόοδος $\Rightarrow$ $2y = x + \omega$ **(1)**
x, λy, ω γεωμετρική πρόοδος $\Rightarrow$ $\lambda^2 y^2 = x\omega$ **(2)**

Αρκεί να αποδείξουμε $2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega}$

$$2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 y} = \frac{x + \omega}{x\omega}$$

Απαλλαγή από τα x, ω

λόγω των (1) και (2) $2 \cdot \frac{1}{\lambda^2 y} = \frac{2y}{\lambda^2 y^2}$ $\Leftrightarrow$

$$2\lambda^2 y = 2\lambda^2 y$$ που ισχύει

netsuccess.gr

13.

Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι

$(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$

Προτεινόμενη λύση

Από την υπόθεση είναι $\beta = \alpha\lambda$, $\gamma = \alpha\lambda^2$, $\delta = \alpha\lambda^3$

Εκφράζουμε τους β, γ, δ συναρτήσει των α, λ

$(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2 \quad \Leftrightarrow$

$(\alpha + \alpha\lambda^3)(\alpha\lambda + \alpha\lambda^2) - (\alpha + \alpha\lambda^2)(\alpha\lambda + \alpha\lambda^3) = (\alpha\lambda - \alpha\lambda^2)^2$

$\alpha(1 + \lambda^3)\alpha\lambda(1 + \lambda) - \alpha(1 + \lambda^2)\alpha\lambda(1 + \lambda^2) = [\alpha\lambda(1 - \lambda)]^2$

$\alpha^2\lambda\left[(1 + \lambda^3)(1 + \lambda) - (1 + \lambda^2)(1 + \lambda^2)\right] = \alpha^2\lambda^2(1 - 2\lambda + \lambda^2)$

$1 + \lambda + \lambda^3 + \lambda^4 - 1 - \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^4 = \lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2)$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3$ που ισχύει

14.

Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, δείξτε ότι

$(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2 = (\alpha - \delta)^2$

Υπόδειξη : Άσκηση 13

netsuccess.gr

15.

Ο πληθυσμός μιας πόλης σήμερα είναι 80000 κάτοικοι και ελαττώνεται κάθε χρόνο κατά 2% . Αν $α_ν$ είναι ο πληθυσμός της πόλης μετά ν χρόνια

i) Να βρείτε πόσος θα είναι ο πληθυσμός μετά από ν + 1 χρόνια

ii) Να βρείτε πόσος θα είναι ο πληθυσμός μετά από 10 χρόνια

iii) Μετά από πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα είναι 50000

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $α_ν$ είναι ο πληθυσμός της πόλης μετά από ν χρόνια, μετά από ν +1 χρόνια θα

είναι $α_{ν+1} = α_ν - \frac{2}{100}α_ν = α_ν(1-0,02) = 0,98\,α_ν$.

Άρα η ακολουθία $α_ν$ του πληθυσμού είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $λ = 0,98$ και πρώτο όρο $α_1$ τον πληθυσμό της πόλης στο τέλος της πρώτης χρονιάς, που είναι

$α_1 = 80000 - 0,02 \cdot 80000 = 0,98 \cdot 80000 = 78400$

ii)

Μετά από 10 χρόνια ο πληθυσμός θα είναι $α_{10} = α_1λ^9 = 78400 \cdot (0,98)^9 \approx 65365$

iii)

Έστω ότι ο πληθυσμός θα είναι 50000 σε μ χρόνια.

$$α_μ = 50000 \quad \Leftrightarrow \quad α_1\,(0,98)^{μ-1} = 50000$$

$$78400\ (0,98)^{μ-1} = 50000$$

$$(0,98)^{μ-1} = 0,6377$$

Με κομπιουτεράκι βρίσκουμε ότι ν = 23 περίπου .

netsuccess.gr

16.

Ένα εργοστάσιο θέλει να νοικιάσει μία αποθήκη για 11 χρόνια με νοίκι 25000 € το χρόνο . Έχει να επιλέξει μεταξύ των προσφορών :

Α) Να πληρώνει σταθερή ετήσια αύξηση 1300 €

Β) Να πληρώνει αύξηση στο νοίκι 4% κάθε χρόνο

Για κάθε προσφορά :

i) Να βρείτε το νοίκι που θα πληρώσει το 2^{o} χρόνο

ii) Να βρείτε το νοίκι που θα πληρώσει το ν-οστό χρόνο συναρτήσει του ν

iii) Να βρείτε το νοίκι που θα πληρώσει για τα 11 χρόνια

Ποια προσφορά συμφέρει καλύτερα ;

Δίνεται ότι $(1{,}04)^{10} \approx 1{,}48$

Προτεινόμενη λύση

Α) προσφορά

i)

Έστω $\alpha_1 = 25000$ είναι το νοίκι του πρώτου χρόνου

Το δεύτερο χρόνο θα πληρώσει $\alpha_2 = \alpha_1 + 1300 = 25000 + 1300 = 26300$

ii)

Οι τιμές του ενοικίου κάθε έτος, σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 25000$ και διαφορά $\omega = 1300$.

Άρα το ν-οστό χρόνο θα πληρώσει
$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \alpha_1 + (\nu - 1)\omega\\ &= 25000 + (\nu - 1)1300\\ &= 1300\nu + 23700\end{aligned}$$

iii)

Το συνολικό νοίκι που θα πληρώσει για τα 11 χρόνια είναι ίσο με το S_{11} της παραπάνω προόδου :
$$\begin{aligned}S_{11} = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] &= \frac{11}{2}[2\,.\,25000 + 10.\,1300]\\ &= \frac{11}{2}[50000 + 13000]\\ &= \frac{11}{2}\,63000 = 346500\ €\end{aligned}$$

Β) προσφορά

i)

Έστω $\beta_1 = 25000$ το νοίκι του πρώτου έτους.

Το δεύτερο χρόνο θα πληρώσει
$$\begin{aligned}\beta_2 = \beta_1 + \frac{4}{100}\beta_1 &= \beta_1(1+0{,}04) = 1{,}04\cdot\beta_1\\ &= 1{,}04\cdot 25000 = 26000\end{aligned}$$

ii)

Οι τιμές του ενοικίου κάθε έτος σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\beta_1 = 25000$ και λόγο $\lambda = 1{,}04$.

Άρα μετά από ν χρόνια θα πληρώσει $\beta_\nu = \beta_1 \lambda^{\nu-1} = 25000(1{,}04)^{\nu-1}$

iii)

Το συνολικό ποσό για τα 11 χρόνια είναι ίσο με το Σ_{11} της προόδου :

netsuccess.gr

$$\Sigma_{11} = \beta_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 25000\ \frac{(1,04)^{11} - 1}{1,04 - 1}$$

$$= 25000\ \frac{(1,04)^{10}\,(1,04) - 1}{0,04}$$

$$= 25000\ \frac{1,48 \cdot (1,04) - 1}{0,04}$$

$$= 25000\ \frac{1,54 - 1}{0,04}$$

$$= 25000\ \frac{0,54}{0,04} = 25000\ \frac{54}{4} = 25000\ .\ 13,5 = 337500\ €$$

Όπως είναι φανερό συμφέρει η δεύτερη προσφορά .

netsuccess.gr

17.

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας α_ν δίνεται από τον τύπο

$S_\nu = 3\cdot(2^\nu - 1)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

i) Να βρείτε συναρτήσει του ν το $S_{\nu-1}$

ii) Να βρείτε τον α_ν συναρτήσει του ν

iii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος της οποίας να βρείτε τον α_1 και το λόγο.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$S_{\nu-1} = 3\cdot(2^{\nu-1} - 1) = 3\cdot(2^\nu \cdot 2^{-1} - 1) =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2^\nu - 1\right)$$

ii)

$S_\nu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{\nu-1}) + \alpha_\nu \quad \Rightarrow \quad S_\nu = S_{\nu-1} + \alpha_\nu$

$$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}$$

$$\alpha_\nu = 3\cdot(2^\nu - 1) - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2^\nu - 1\right)$$

$$\alpha_\nu = 3\cdot\left(2^\nu - 1 - \frac{1}{2}\cdot 2^\nu + 1\right)$$

$$\alpha_\nu = 3\cdot\left(2^\nu - \frac{1}{2}\cdot 2^\nu\right)$$

$$\alpha_\nu = 3\cdot 2^\nu\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha_\nu = \frac{3}{2}2^\nu$$

iii)

Είναι $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot 2^{\nu+1}}{\frac{3}{2}\cdot 2^\nu} = 2$, άρα η ακολουθία α_ν είναι γ.πρόοδος με λόγο 2

και $\alpha_1 = S_1 = 3\cdot(2^1 - 1) = 3$

netsuccess.gr

18.

Το γινόμενο των ν πρώτων όρων μίας ακολουθίας α_ν δίνεται από τον τύπο

$P_\nu = \dfrac{1}{3^{\nu^2+\nu}}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

i) Να βρείτε το $P_{\nu-1}$ συναρτήσει του ν

ii) Να βρείτε το ν-στο όρο της ακολουθίας συναρτήσει του ν

iii) Να δείξτε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον α_1 και το λόγο λ.

Προτεινόμενη λύση

i)

$P_{\nu-1} = \dfrac{1}{3^{(\nu-1)^2+(\nu-1)}} = \dfrac{1}{3^{\nu^2-\nu}}$ για κάθε $\nu \geq 2$

ii)

$P_\nu = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1}) \cdot \alpha_\nu \quad \Rightarrow \quad P_\nu = P_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu$

$$\alpha_\nu = \frac{P_\nu}{P_{\nu-1}} = \frac{\dfrac{1}{3^{\nu^2+\nu}}}{\dfrac{1}{3^{\nu^2-\nu}}}$$

$$\alpha_\nu = \frac{3^{\nu^2-\nu}}{3^{\nu^2+\nu}} = 3^{-2\nu}$$

Εξάλλου $\alpha_1 = P_1 = \dfrac{1}{9} = 3^{-2\cdot 1}$, άρα $\alpha_\nu = 3^{-2\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

iii)

$\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{3^{-2(\nu+1)}}{3^{-2\nu}} = \dfrac{3^{-2\nu-2}}{3^{-2\nu}} = \dfrac{1}{9}$

Οπότε η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = \dfrac{1}{9}$ και λόγο $\lambda = \dfrac{1}{9}$

netsuccess.gr